

# Musteraufgaben für das Fach Mathematik

zur Vorbereitung der Einführung  
länderübergreifender gemeinsamer  
Aufgabenteile in den  
Abiturprüfungen ab dem Schuljahr  
2013/14

## Impressum

Das vorliegende Material wurde von einer Arbeitsgruppe mit Vertretern aus den Ländern Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein erarbeitet.

### Herausgeber:

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus

Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern

Niedersächsisches Kultusministerium

Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport

Ministerium für Bildung und Kultur Schleswig-Holstein

## Inhaltsverzeichnis

	<b>Seite</b>
Vorbemerkungen.....	3
1 Musteraufgaben für Aufgabenpool 1 .....	4
1.1 Analysis.....	4
1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra .....	5
1.2.1 Analytische Geometrie .....	5
1.2.2 Lineare Algebra .....	6
1.3 Stochastik .....	7
2 Musteraufgaben für Aufgabenpool 2 .....	9
2.1 Analysis.....	9
2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra .....	11
2.2.1 Analytische Geometrie .....	11
2.2.2 Lineare Algebra.....	12
2.3 Stochastik .....	14

### Vorbemerkungen

Für das Fach Mathematik werden zwei Aufgabenpools vorgelegt, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die in der EPA Mathematik ermöglichten Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Um die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrkräfte mit den Anforderungen der gemeinsamen Prüfungselemente in der zentralen schriftlichen Abiturprüfung ab 2014 vertraut zu machen, wird in den beteiligten Ländern einmalig im Schuljahr 2013/14 ein schriftlicher Leistungsnachweis eingesetzt. Dafür werden in analoger Weise zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung Aufgabenpools bereitgestellt. Die Durchführung des schriftlichen Leistungsnachweises und die Auswahl der Aufgaben aus den Aufgabenpools werden in den Ländern geregelt.

Die vorliegenden Musteraufgaben sollen den Lehrkräften sowie den Schülerinnen und Schülern eine Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis geben.

### 1 Musteraufgaben für Aufgabenpool 1

#### 1.1 Analysis

##### A1\_1

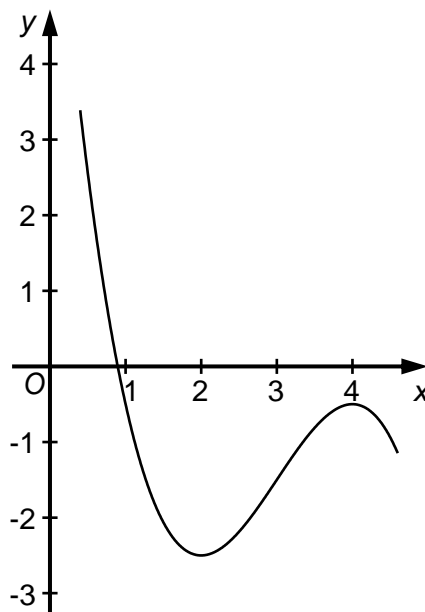
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -0,5 \cdot x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7,5$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

1.1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung  $0 = -0,5 \cdot x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7,5$  nur genau eine Lösung hat.

2 BE

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von  $f$ .

3 BE



Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Begründung z. B.: eine Nullstelle erkennbar; keine weiteren Nullstellen aufgrund der Anzahl der erkennbaren lokalen Extrempunkte und dem Grad der ganzrationalen Funktion 2 BE
1.2	Ansatz für Abszisse des Wendepunktes Abszisse des Wendepunktes Koordinaten des Wendepunktes: $(3   -1,5)$ 3 BE

##### A1\_2

Das Rechteck  $ABCD$  mit  $A(1|0)$ ,  $B(4|0)$ ,  $C(4|2)$  und  $D(1|2)$  wird durch den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ) in zwei Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

5 BE

Vorgaben für die Bewertung	
	Ansatz für Flächeninhalt der Teilfläche unterhalb des Graphen von $f$ Flächeninhalt der Teilfläche unterhalb des Graphen von $f$ : $\frac{14}{3}$ Ansatz für Flächeninhalt der Teilfläche oberhalb des Graphen von $f$ Flächeninhalt der Teilfläche oberhalb des Graphen von $f$ : $\frac{4}{3}$ Verhältnis: 7 : 2 5 BE

## 1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

### 1.2.1 Analytische Geometrie

#### G1\_1

Gegeben sind die Ebene  $E: 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$  sowie der Punkt  $P(-3|0|2)$ .

1.1 Zeigen Sie, dass der Punkt  $P$  nicht in der Ebene  $E$  liegt.

1 BE

1.2 Spiegelt man den Punkt  $P$  an der Ebene  $E$ , so erhält man den Punkt  $P'$ .  
Ermitteln Sie die Koordinaten von  $P'$ .

4 BE

Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Nachweis 1 BE
1.2	Ansatz zur Ermittlung der Koordinaten des Punktes $P'$ (3 BE) Koordinaten von $P'$ : $P'(5 4 -2)$ 4 BE

#### G1\_2

Gegeben ist das Viereck  $ABCD$  mit den Eckpunkten  $A(0|0|0)$ ,  $B(-3|1|4)$ ,  $C(2|-4|4)$  und  $D(5|-5|0)$ .

1.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

3 BE

1.2 Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser  $\overline{AC}$  an.

2 BE

Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Nachweis, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist Nachweis, dass das Viereck $ABCD$ kein Rechteck ist (2 BE) 3 BE
1.2	Koordinaten des Mittelpunktes: $(1 -2 2)$ Radius: 3 2 BE

**1.2.2 Lineare Algebra**

**LA1\_1**

Gegeben sind die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und der Vektor  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1.1 Es gelte  $\vec{v}_{i+1} = A \cdot \vec{v}_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$ .  
Berechnen Sie  $\vec{v}_2$ .

2 BE

1.2 Bestimmen Sie den Vektor  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  mit den kleinstmöglichen Werten  $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   
so, dass  $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$  gilt.

3 BE

Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Ansatz für Vektor $\vec{v}_2$ Vektor $\vec{v}_2$ : $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$
1.2	Ansatz für Vektor $\vec{w}$ (2 BE) Vektor $\vec{w}$ : $\vec{w} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 BE

3 BE

**LA1\_2**

Betrachtet werden die Matrizen  $A$  und  $B$  mit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$  sowie eine Matrix  $C$ .

1.1 Zeigen Sie, dass  $B$  die zu  $A$  inverse Matrix ist.

2 BE

1.2 Für die Matrix  $C$  gilt:

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass gilt:  $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

3 BE

Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Nachweis
1.2	Begründung

2 BE

3 BE

1.3 Stochastik

S1\_1

Die Zufallsvariable  $X$  ist binomialverteilt mit  $n=10$  und  $p=0,6$ .

1.1 Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von  $X$  darstellt. Begründen Sie Ihre Auswahl.

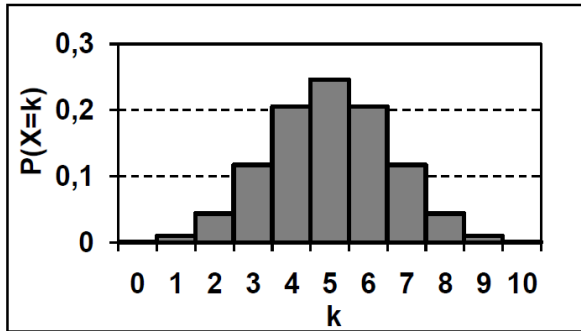


Abbildung 1

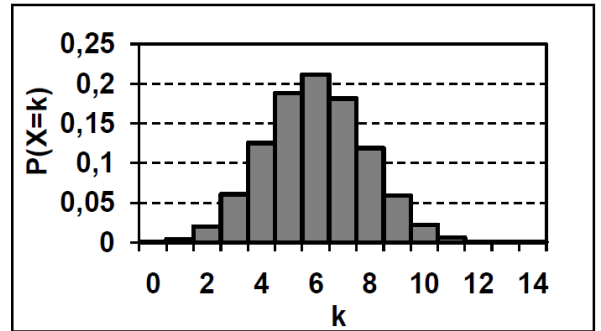


Abbildung 2

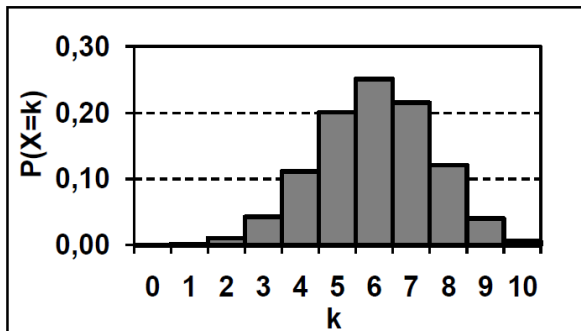


Abbildung 3

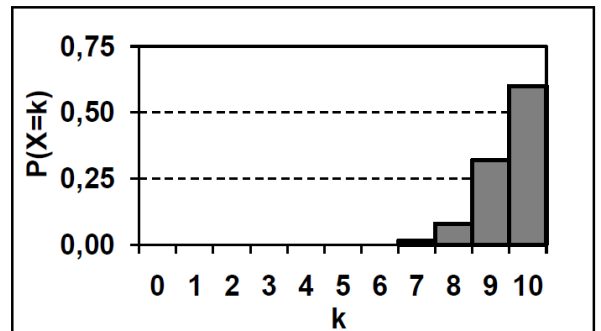


Abbildung 4

3 BE

1.2 Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit  $P(4 < X < 7)$  und die Wahrscheinlichkeit  $P(X \neq 5)$  an.

2 BE

Vorgaben für die Bewertung		
1.1	Abbildung 3 zeigt die Verteilung von $X$ Begründung, z. B. unter Verwendung des Erwartungswertes von $X$ (2 BE)	3 BE
1.2	Wahrscheinlichkeit: $P(4 < X < 7) \approx 0,45$ Wahrscheinlichkeit: $P(X \neq 5) \approx 0,8$	2 BE

**S1\_2**

In den Urnen  $U_1$  und  $U_2$  befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

$U_1$ : 6 rote und 4 blaue Kugeln

$U_2$ : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne  $U_1$  werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

2 BE

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne  $U_1$  stammt.

3 BE

Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Ansatz für Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit: $\frac{7}{15}$
	2 BE
1.2	Ansatz für Wahrscheinlichkeit (2 BE) Wahrscheinlichkeit: $\frac{3}{4}$
	3 BE



## 2 Musteraufgaben für Aufgabenpool 2

### 2.1 Analysis

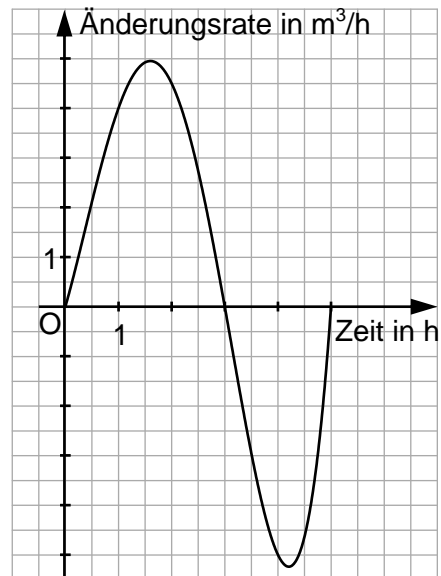
#### A2\_1

Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von  $5 \text{ m}^2$  und ist zunächst leer.

Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate (in  $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ ) der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

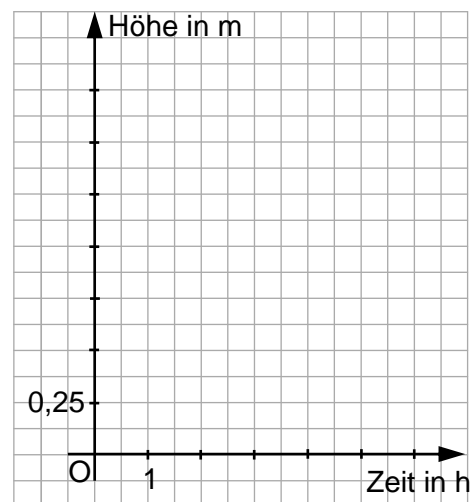
2.1 Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

2 BE



2.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.

3 BE



Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Ansatz für Näherungswert Näherungswert: zwischen $7 \text{ m}^3$ und $10 \text{ m}^3$
	2 BE
2.2	Skizze eines sachgerechten Graphen z. B.: Verlauf durch $(0 0)$ ; alle Punkte im ersten Quadranten Maximum an der Stelle 3 Minimum an der Stelle 5, dort Funktionswert größer 0
	3 BE

**A2\_2**

Für jeden Wert für  $a$  ( $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = e^{a \cdot x^2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Zeigen Sie, dass die Tangente  $t_a$  an den Graphen der Funktion  $f_a$  im Punkt  $P_a(1 | f_a(1))$  durch die Gleichung  $t_a(x) = 2 \cdot a \cdot e^a \cdot x + e^a \cdot (1 - 2 \cdot a)$  beschrieben werden kann.

5 BE

Vorgaben für die Bewertung	
	<p>Nachweis <span style="float: right;">5 BE</span></p> <p>z. B.: eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von <math>f_a</math></p> <p>Nachweis für Anstieg der Tangente <math>t_a</math></p> <p>Ordinate des Punktes <math>P_a</math></p> <p>Ansatz für Nachweis des Achsenabschnitts auf der Ordinatenachse</p> <p>Nachweis des Achsenabschnitts auf der Ordinatenachse</p>

## 2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

### 2.2.1 Analytische Geometrie

#### G2\_1

Im Raum sind eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $A$ , der nicht auf der Geraden  $g$  liegt, gegeben.

Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte  $B$  und  $C$  der Geraden  $g$ , die zusammen mit  $A$  ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

5 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
	Beschreibung	5 BE

#### G2\_2

Gegeben sind die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  mit  $E_1: 6 \cdot x_1 - x_2 - 4 \cdot x_3 = 12$  und  $E_2: -3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -6$ . Die Punkte  $A(2|0|0)$  und  $B(0|0|-3)$  liegen in beiden Ebenen.

2.1 Begründen Sie, dass die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  nicht identisch sind.

1 BE

2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten eines von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt.

2 BE

2.3 In der Gleichung von  $E_2$  soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene  $E_1$  entsteht.

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

2 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Begründung	1 BE
2.2	Ansatz für Koordinaten eines Punktes mit der geforderten Eigenschaft Koordinaten eines Punktes mit der geforderten Eigenschaft	2 BE
2.3	Änderung: Der Koeffizient 5 in der Gleichung von $E_2$ ist in 0,5 umzuwandeln. Begründung	2 BE

## 2.2.2 Lineare Algebra

### LA2\_1

Es gibt 2x2-Matrizen, die besondere Eigenschaften bezüglich ihrer Quadrate besitzen.

2.1 Für jeden Wert für  $t$  ( $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ ) ist eine Matrix  $M_t$  durch  $M_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$  gegeben.

Ermitteln Sie, welche besondere Eigenschaft die Matrizen  $M_t$  bezüglich ihrer Quadrate  $M_t^2$  haben.

2 BE

2.2 Für eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$  und  $b \cdot c \neq 0$  gilt  $A^2 = b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Untersuchen Sie, welche Werte für die Elemente der Matrix  $A$  in Frage kommen.

3 BE

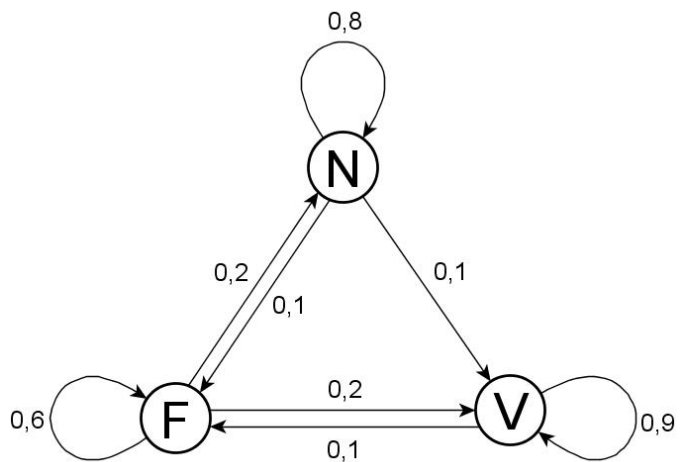
Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Ansatz für besondere Eigenschaft durch Berechnung von $M_t^2$ besondere Eigenschaft: Die Quadrate aller Matrizen sind unabhängig von $t$ gleich der Einheitsmatrix. 2 BE
2.2	Untersuchung Werte für $a$ und $d$ : $a = d = 0$ Werte für $b$ und $c$ : $b \neq 0; c \neq 0$

3 BE

**LA2\_2**

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).

Der nebenstehende Graph gibt die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer dieser Kantine konstant bleibt.



2.1 Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix  $M$  fehlenden Werte an.

$$M = \begin{pmatrix} \square & 0,1 & \square \\ 0,2 & 0,9 & 0,1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

2 BE

2.2 Geben Sie den Wert  $a_{22}$  der Matrix  $M^2 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  an.

1 BE

2.3 Interpretieren Sie die Bedeutung der zweiten Zeile der Matrix  $M^2$  im Sachzusammenhang.

2 BE

Vorgaben für die Bewertung	
2.1	vollständige Angabe der fehlenden Werte: $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ <span style="float: right;">2 BE</span>
2.2	Wert für $a_{22}$ : 0,83 <span style="float: right;">1 BE</span>
2.3	An einem beliebigen Tag setzen sich die Nutzer der Kantine aus Essern des Fleischgerichts, des vegetarischen Gerichts und des Nudelgerichts zusammen. Mit dieser Zusammensetzung liefert die zweite Zeile der Matrix $M^2$ die Anzahl der Nutzer, die zwei Tage später das vegetarische Gericht auswählen. <span style="float: right;">2 BE</span>

## 2.3 Stochastik

### S2\_1

Verteilungen von Zufallsgrößen werden durch Parameter charakterisiert.

- 2.1 In den Klassen 10 a und 10 b, die jeweils aus 25 Schülern bestehen, wurden die Leistungen jedes Schülers im Weitsprung ermittelt. Die Zufallsgrößen  $A$  und  $B$  ordnen jeweils einem zufällig ausgewählten Schüler der Klasse 10 a bzw. 10 b seine Sprungweite in Meter zu. Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt  $E(A) = E(B)$ , für die Standardabweichungen  $\sigma(A) < \sigma(B)$ .

Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilungen der Sprungweiten bedeuten.

2 BE

- 2.2 Eine Zufallsgröße  $X$  kann fünf unterschiedliche Werte annehmen.

Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße  $X$  so an, dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert dieser Zufallsgröße liegt.

3 BE

Vorgaben für die Bewertung													
2.1	<p>Erklärung <span style="float: right;">2 BE</span></p> <p>z. B.: Der Durchschnitt der Sprungweiten der Schüler der Klasse 10 a stimmt mit dem der Schüler der Klasse 10 b überein. Die Sprungweiten der Schüler der Klasse 10 a streuen weniger als die der Schüler der Klasse 10 b.</p>												
2.2	<p>Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung <span style="float: right;">3 BE</span></p> <p>z. B.:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x_i</math></td> <td style="padding: 5px;">-10</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>P(X = x_i)</math></td> <td style="padding: 5px;">0,6</td> <td style="padding: 5px;">0,1</td> <td style="padding: 5px;">0,1</td> <td style="padding: 5px;">0,1</td> <td style="padding: 5px;">0,1</td> </tr> </table> <p>Hinweis: Eine BE wird vergeben, wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt.</p>	$x_i$	-10	1	2	3	4	$P(X = x_i)$	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1
$x_i$	-10	1	2	3	4								
$P(X = x_i)$	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1								

**S2\_2**

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt  $p$ .

2.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse  $A$  und  $B$  an:

$A$ : Bei fünf Würfeln fällt genau dreimal „Wappen“.

$B$ : Bei fünf Würfeln fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfeln zweimal.

3 BE

2.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfeln dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“.

2 BE

Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Wahrscheinlichkeit für Ereignis $A$ : $P(A) = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$ <span style="float: right;">1 BE</span> Wahrscheinlichkeit für Ereignis $B$ : $P(B) = p^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot p \cdot (1-p)^2$ <span style="float: right;">2 BE</span>
2.2	Untersuchung <span style="float: right;">2 BE</span> z. B.: Das Ergebnis „Wappen“ ist wahrscheinlicher als das Ergebnis „Zahl“, da $0,216 > 0,5^3$ gilt.